

私立淡江高級中學數學挑戰賽高中組第一期(三月份)試題解答

數學科教學研究會

115, 3, 2

(1) 直角三角形外心(外切圓圓心)位於斜邊的中點。因此,外切圓的半徑 R 等於斜邊長度的一半,即 $R = \frac{c}{2}$ 。設三角形面積為 A , $s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow A = rs$,

直角三角形面積為 $\frac{1}{2}ab \Rightarrow \frac{1}{2}ab = rs = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b+c}$, 利用畢氏定理

$$a^2 + b^2 = c^2, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$\Rightarrow (a+b-c)(a+b+c) = 2ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}}{a+b+c} \Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\frac{a+b-c}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{a+b-c}{c} = \frac{a+b}{c} - 1$$

(2) 設三角形的一個銳角為 θ ,

則 $a = c \sin \theta$, $b = c \cos \theta$, $\frac{r}{R} = \frac{a+b}{c} - 1 = \frac{c \sin \theta + c \cos \theta}{c} - 1 = \sin \theta + \cos \theta - 1$, 當

$\theta = 45^\circ$ 時, $\frac{r}{R}$ 有最大值 $\sqrt{2} - 1$

(3) 三角形為等腰直角三角形