

重點聚焦

一、平方展開公式：

$$1. (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$2. (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

二、平方差公式：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

三、完全立方公式：

$$1. (a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$2. (a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

四、立方差（和）公式：

$$1. (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

$$2. (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

五、分式運算：

例如：

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{4x}{x^2-1}.$$

六、根式運算：

設 $a > 0, b > 0$ ，則

$$(1) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a|.$$

$$(3) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$(4) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$$

七、雙重根式的化簡：

設 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則

$$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} \pm \sqrt{b}|.$$

老師說

利用 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，計算 99^2 。

解

學生做

利用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，計算 101^2 。

解

老師說

利用 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ，展開 $(x+2y)^2(x-2y)^2$ 。

解

學生做

展開 $(2x-y)^2(y+2x)^2$ 。

解

延伸練習

展開 $(a-b+5)(a+b-5)$ 。**答**：_____。

老師說展開 $(2x+y)^3$ 。**解****學生做**展開 $(2x+3)^3$ 。**解****延伸練習**展開 $(x-2y^2)^3$ 。**答**：_____。**老師說**利用 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ ，展開 $(x+3)(x^2-3x+9)$ 。**解****學生做**展開 $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ 。**解****延伸練習**計算 101^3-1 。**答**：_____。**老師說**化簡 $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}$ 。**解****學生做**化簡 $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}$ 。**解****延伸練習**設 $x+y=4$ ， $xy=1$ ，求 $\frac{y}{x+1} + \frac{x}{y+1}$ 的值。**答**：_____。**老師說**化簡 $\frac{\sqrt{54}}{3} + \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{8}{\sqrt{24}}$ 。**解****學生做**化簡 $5\sqrt{18} - 7\sqrt{8} + 4\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$ 。**解****延伸練習**化簡 $(1-\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ 。**答**：_____。

老師說

設 $a > 0, b > 0$ ，利用 $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ，化簡 $\sqrt{13+4\sqrt{10}}$ 。

解
學生做

化簡 $\sqrt{21-2\sqrt{38}}$ 。

解
延伸練習

設 $a = \sqrt{8} + \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ，試比較 a, b 之大小。**答**：_____。

老師說 *

設 a, b 為實數，且 $a-b=5$ ， $ab=-3$ ，求 a^3-b^3 之值。

解
*** 學生做**

設 a, b 為實數，且 $a+b=8$ ， $ab=3$ ，求 a^2+b^2 之值。

解
延伸練習

設 $a = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ，求 a^3+b^3 之值。**答**：_____。

老師說 *

化簡 $(2-x)(2+x)(4+x^2)(16+x^4)$ 。

解
*** 學生做**

化簡 $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$ 。

解
老師說 *

化簡 $(3+\sqrt{5})^4(3\sqrt{5}-7)^2$ 。

解
*** 學生做**

化簡 $(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1-\sqrt{3}+\sqrt{5})$ 。

解
延伸練習

化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$ 。**答**：_____。

先修評量

單元



乘法公式、分式與根式運算



每題 10 分，共計 100 分

1. 算式 $(-3)^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^3}$ 之值為何？

- (A) -138 (B) -122 (C) 24 (D) 40

答：_____

【104.會考】

2. 算式 $\sqrt{6} \times (\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)$ 之值為何？

- (A)
- $\sqrt{2} - \sqrt{6}$
- (B)
- $\sqrt{2} - 1$
- (C)
- $2 - \sqrt{6}$
- (D) 1

答：_____。

【107.會考】

3. 判斷下列各式的值，何者最大？

- (A)
- $25 \times 13^2 - 15^2$
- (B)
- $16 \times 17^2 - 18^2$
- (C)
- $9 \times 21^2 - 13^2$
- (D)
- $4 \times 31^2 - 12^2$

答：_____。

【104.會考】

4. 下列哪些是 $x^6 - 2^6$ 的因式？(多選)

- (A)
- $x - 2$
- (B)
- $x + 2$
- (C)
- $x^2 - 4$
- (D)
- $x^2 - 4x + 4$
- (E)
- $x^2 + 2x + 4$

答：_____。

5. 計算 $(2x+1)(x-1) - (x^2+x-2)$ 的結果，與下列哪一個式子相同？

- (A)
- $x^2 - 2x + 1$
- (B)
- $x^2 - 2x - 3$
- (C)
- $x^2 + x - 3$
- (D)
- $x^2 - 3$

答：_____。

【105.會考】

6. 若 a, b 為兩質數且相差 2，則 $ab + 1$ 之值可能為下列何者？

- (A)
- 39^2
- (B)
- 40^2
- (C)
- 41^2
- (D)
- 42^2

答：_____

【106.會考】

7. 求 $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times (1 - \frac{1}{4^2}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{10^2}) =$ _____。8. 已知 a, b 為實數，且 $a + b = 5$ ， $a^3 + b^3 = 185$ ，求 $a^2 + b^2 =$ _____。9. 設 $\sqrt{10 + 4\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$ 之整數部分為 a ，正小數部分為 b ，則 $b =$ _____。10. 求 $(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \times (1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}) \times (-1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) =$ _____。

◎ 因式分解

+ 重點聚焦

一、提公因式：

- $ab+ac=a(b+c)$ 。
- $ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)$
 $= (a+b)(c+d)$ 。


二、平方公式：

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 。
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 。
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 。

三、三次方公式：

- $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ 。
- $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ 。
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 。
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 。

四、十字交乘法：

- $x^2+(a+b)x+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)$
 $=x(x+a)+b(x+a)$
 $= (x+a)x(x+b)$ 。
- $acx^2+(ad+bc)x+bd$
 $= (acx^2+adx)+(bcx+bd)$ 
 $= ax(cx+d)+b(cx+d)$
 $= (ax+b)(cx+d)$ 。

五、利用因式分解求方程式解：

若 $(ax-b)(cx-d)=0$ (其中 $a, c \neq 0$)，
則 $x=\frac{b}{a}$ 或 $\frac{d}{c}$ 。

📖 老師說

因式分解 $3xy+3y-2x-2$ 。

解

✍ 學生做

因式分解

 $(3a+b)(a+2b)^2-(3a+b)^2(a+2b)$ 。

解

📌 延伸練習

將下列因式分解 $a^2b+ab^2-ab-a-b+1$ 。答：_____。

📖 老師說

因式分解 $16x^4-81$ 。

解


✍ 學生做

因式分解 x^4-1 。

解

📌 延伸練習

因式分解 $(x^2+y^2-4)^2-4x^2y^2$ 。答：_____。

 老師說

因式分解 $8x^3 - 125$ 。

解


 學生做

因式分解 $x^3 + 27$ 。

解

 延伸練習

將 $9^6 - 64$ 寫成標準分解式。**答**：_____。

 老師說

因式分解 $6x^2 - 5x - 6$ 。

解


 學生做

因式分解： $x^4 - 13x^2 + 36$ 。

解

 延伸練習

分解因式： $a^2 + b^2 - 2ab - 5a + 5b + 6$ 。**答**：_____。

 老師說

解方程式 $6x^2 - 7x - 3 = 0$ 。

解

 學生做

解方程式 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ 。

解

 延伸練習

解方程式 $x^2 - 2x - 399 = 0$ 。**答**：_____。

老師說 *因式分解 $x^4 + x^2y^2 + y^4$ 。**解***** 學生做**因式分解 $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$ 。**解****延伸練習**因式分解： $9x^4 - 7x^2 + 1$ 。**答**：_____。**老師說 ***因式分解 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$ 。**解***** 學生做**因式分解 $(x^2+2x-2)(x^2+2x+7)+18$ 。**解****延伸練習**因式分解 $x^4 + 64$ 。**答**：_____。**老師說 ***設 $x - \frac{1}{x} = 2$ ，利用分解因式求 $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 的值。**解***** 學生做**設 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，利用分解因式求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 的值。**解****延伸練習**設 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求 $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ 的值。**答**：_____。

先修評量

單元



◎ 因式分解



每題 10 分，共計 100 分

1. 已知 $6x^2 - 7x - 3 = (ax + 1)(2x + b)$ ，則 $a + b =$ _____。

2. 若多項式 $5x^2 + 17x - 12$ 可因式分解成 $(x + a)(bx + c)$ ，其中 a, b, c 均為整數，則 $a + c$ 之值為何？

- (A) 1 (B) 7 (C) 11 (D) 13

【108.會考】

答：_____。

3. 已知 $2x - 3$ 為 $4x^2 - 2x + m$ 的因式，則 $4x^2 - 2x + m$ 可因式分解為何？

- (A) $(2x - 3)(2x + 1)$ (B) $(2x - 3)(3x + 2)$ (C) $2(2x - 3)(x + 1)$
(D) $(2x - 3)(x - 2)$ (E) $2(2x - 3)(x - 1)$

【國中試題】

答：_____。

4. 判斷一元二次方程式 $x^2 - 8x - a = 0$ 中的 a 為下列哪一個數時，可使得此方程式的兩根均為整數？

- (A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24

【104.會考】

答：_____。

5. 若一元二次方程式 $x^2 - 8x - 3 \times 11 = 0$ 的兩根為 a, b ，且 $a > b$ ，則 $a - 2b$ 之值為何？

- (A) -25 (B) -19 (C) 5 (D) 17

【107.會考】

答：_____。

6. 若一元二次方程式 $95x^2 + 3x - 36 = 0$ 的兩根為 a, b ，且 $a > b$ ，則 $a =$ _____。 【國中試題】

7. 解方程式 $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) + 15 = 0$ ，其中兩整數根分別為_____。

8. 設 $x = t + \frac{1}{t}$ ，試求 $t^3 + \frac{1}{t^3} =$ _____。(以 x 表示)

9. 下列各多項式中，哪些可分解為兩個或兩個以上整係數多項式的乘積？(多選)

- (A) $x^2 + x + 1$ (B) $x^3 + x^2 + x + 1$ (C) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
(D) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (E) $x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

答：_____。

10. 因式分解 $(x + 3y)^2 - 4(2x^2 + 7xy + 3y^2) + 4(2x + y)^2 =$ _____。

絕對值與分點公式

重點聚焦

一、數線上兩點的距離：

1. 絕對值的運算性質：

(1) $|0| = 0, |a| > 0 (a \neq 0)$ 。

(2) $|a| = |-a|$ 。

(3) $|a \times b| = |a| \times |b|$ ，

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)。$$

2. 數線上絕對值的幾何意義：

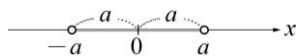
(1) $|a-b|$ 就是“ a 與 b 的距離”。

(2) $|a| = |a-0|$ 為“ a 與原點的距離”。

二、簡單的絕對值不等式：

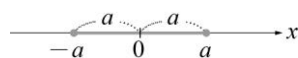
1. 絕對值不等式 $|x| < a (a > 0)$ 的解為

$$-a < x < a。$$

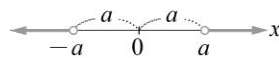


2. 絕對值不等式 $|x| \leq a (a > 0)$ 的解為

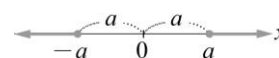
$$-a \leq x \leq a。$$



3. 絕對值不等式 $|x| > a (a > 0)$ 的解為
 $x < -a$ 或 $x > a$ 。



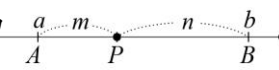
4. 絕對值不等式 $|x| \geq a (a > 0)$ 的解為
 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$ 。



三、分點公式：

1. 分點公式：

設 $A(a), B(b)$ 為數線上兩點，且



點 P 在 A, B 之間，若 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，

則 P 點坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$ 。

2. 承 1，若 $m : n = 1 : 1$ ，即點 P 是 \overline{AB} 中點

則點 P 坐標為 $\frac{a+b}{2}$ 。(中點公式)

老師說

已知 a, b 皆為整數，且 $b > 0 > a, x = a + b, y = |b| - |a|, z = |a| + |b|$ ，試比較 x, y, z 的大小。

解

【國中試題】

學生做

算式 $(-2) \times |-5| - |-3|$ 之值為何？

解

【106.會考】

老師說

已知 $x < y < z$ ，則 $\frac{|x-y|}{|y-z|} \times \frac{|z-y|}{|y-x|} = ?$

解**學生做**

若 $x > 0, y < 0$ ，則 $\frac{|x|}{x} + \frac{y}{|-y|} = ?$ 【國中試題】

解**延伸練習**

已知 $\frac{8^x}{4^{9-y}} = 1$ 且 $|5x - 7y + 32| = -|5x + 2y + a|$ ，求 a 之值。 **答**：_____。

老師說

解 $|x| \leq 5$ 。

解**學生做**

解 $|x| > 5$ 。

解**延伸練習**

解 $|\sqrt{x} + 1| \leq 5$ 。 **答**：_____。

老師說

解 $|3x - 2| \leq 5$ 。


解**學生做**

解 $|x + 2| \leq 5$ 。

解

 延伸練習

求滿足方程式 $\sqrt{x-11-2\sqrt{x-12}} + \sqrt{x-11+2\sqrt{x-12}} = 2$ 的所有實數解。答：_____。

 老師說

數線上 A, B 兩點的坐標分別是 25, 113, 點 C 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 5 : 3$, 則點 C 的坐標為何?

解

 學生做

在線段 \overline{AB} 上取 O, P, Q 三點, 其中 O 為 \overline{AB} 中點, P, Q 在 \overline{AO} 線段上, 且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 3$, $\overline{AQ} : \overline{QO} = 5 : 2$, 求 $\overline{AP} : \overline{PQ} : \overline{QO} = ?$

解

 延伸練習

知 A, B, P 為數線上三相異點, 且坐標分別為 $-3, 6, x$, 若 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$, 則 P 點的坐標為何? (不只一解) 答：_____。

 老師說 *

設 a, b 為實數, 且 $a > b$, 試比較 $A = \frac{a+b}{2}$, $B = \frac{a+2b}{3}$, $C = \frac{3a+2b}{5}$ 之大小。

解

*  學生做

設 a, b 為實數, 且 $a > b$, 試比較 $A = \frac{a+4b}{5}$, $B = \frac{2a+3b}{5}$, $C = \frac{3a+2b}{5}$ 之大小。

解

 延伸練習

設 a, b 為實數, 且 $a > b$, 試比較 $A = \frac{a+b}{2}$, $B = \frac{a+2b}{3}$, $C = \frac{3a+2b}{5}$, $D = \frac{7a-2b}{5}$, $E = \frac{7b-2a}{5}$ 之大小。答：_____。

先修評量

單元

3

絕對值與分點公式



每題 10 分，共計 100 分

1. 若 $xy < 0$ ，則 $\frac{|x|}{x} \times \frac{y}{|-y|} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 設 $|a| > |b|$ ， a, b 為實數，則下列哪些選項是正確的？(多選)

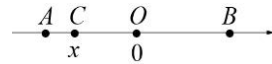
- (A) $|a| > 0$ (B) $|b| > 0$ (C) $|a| + b > 0$ (D) $|b| + a > 0$ (E) a 有可能小於 b

答：_____。

3. 已知 $|x+a| < 5$ 的解為 $-3 < x < 7$ ，其中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. $\left| 1 - \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right| - \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 右圖為 O, A, B, C 四點在數線上的位置圖，其中 O 為原點，且 $\overline{AC} = 1$ ， $\overline{OA} = \overline{OB}$ 。若 C 點所表示的數為 x ，則 B 點所表示的數與下列何者相等？



- (A) $-(x+1)$ (B) $-(x-1)$ (C) $x+1$ (D) $x-1$

【107.會考】

答：_____。

6. 數線上 A, B 兩點的坐標分別為 $-5, 9$ ，若 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ ，則數線上 P 點的坐標

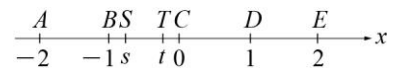
= _____。

7. 已知甲校有 a 人，其中男生占 60%；乙校有 b 人，其中男生占 50%。今將甲、乙兩校合併後，男生比例應該為多少？

【103.會考】

答：_____。

8. 如右圖，若數線上有一點 $R(s-t+1)$ ，則 R 點會落在 \overline{AB} ， \overline{BC} ， \overline{CD} ， \overline{DE} 中哪一個線段內？

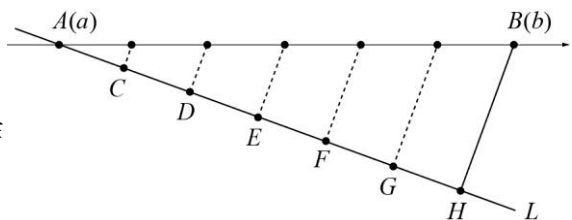


【國中試題】

答：_____。

9. 解方程式 $||x-2|-5|=4$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(有 4 個解)

10. 如右圖，數線上兩點 $A(a), B(b)$ ，設直線 L 通過 A 點，且直線 L 上有 C, D, E, F, G, H 六點，滿足 $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$ ，連接 \overline{BH} ，依尺規作圖方式，過 C, D, E, F, G 分別作 \overline{BH} 的平行線與直線 AB 交出 5 個點，則此 5 個點之坐標可為下列哪些選項？(多選)



- (A) $\frac{2a+3b}{6}$ (B) $\frac{a+b}{2}$ (C) $\frac{a+2b}{3}$ (D) $\frac{5a+b}{6}$ (E) $\frac{a+3b}{6}$

答：_____。

重點聚焦

一、整數指數：

1. 正整數指數 $a^5 = axaxaxaxa$ 。
2. 零指數 $a^0 = 1$ 。($a \neq 0$)
3. 負整數指數 $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ 。($a \neq 0$)
(若 $a=0$ ，則 0^0 與 0^{-n} 都沒有意義。)

二、整數指數律：

設 m, n 為整數，又 $a \neq 0$ ，則

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 。
- (2) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ 。
- (3) $(a^m)^n = a^{mn}$ 。

三、分數指數與方根：

例如： $a > 0$ 時： $\sqrt{a \times a \times a} = \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ ，

$$\sqrt[3]{a \times a} = a^{\frac{2}{3}}。$$

$$\sqrt{512} = 2^{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}},$$

$$\sqrt{\sqrt{27}} = (3\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{7}}} = (7^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 7^{-\frac{1}{6}}。$$

四、科學記號：

例如： $1.3 \times 10^6 = 1300000$ 為七位數，
 $1024 = 1.024 \times 10^3$ 為四位數。

五、位數概念與常用對數：

若正數 p 表成 10 的乘冪，則 $p = 10^a$ ，
則稱 a 為 p 的常用對數，記作 $a = \log p$ 。

例如：

$10000 = 10^4$ 為五位數，記作 $\log 10000 = 4$ 。

$100 = 10^2$ 為三位數，記作 $\log 100 = 2$ 。

使用計算機算出 $10^{0.301} \approx 1.9999$ ，

$$10^{0.302} \approx 2.0045，$$

因為 $10^{0.301} < 2 = 10^a < 10^{0.302}$ ，故

$0.301 < a < 0.302$ ， a 比較接近 0.301，可用
0.301 作為 a 的近似值。

重複使用計算機與十分逼近法，可以找到愈來愈接近 a 的近似值。

$2000 = 2 \times 10^3 \approx (10^{0.3010}) \times 10^3 \approx 10^{3.3010}$ ，即

$\log 2000 \approx 3.3010$ ，利用 \log 計算可知：2000
為一個四位數。

$2^{20} \approx (10^{0.3010})^{20} \approx 10^{6.020}$ ， $\log 2^{20} \approx 6.0200$ ，利用
 \log 計算可知： 2^{20} 為一個七位數。

動動腦：

可以知道 2^{100} 和 3^{100} 分別是幾位數字嗎？

老師說

化簡 $3^{20} - 3^{18}$ 。

解


學生做

計算 $(-3)^4 - (-3^4)$ 。

解

延伸練習

已知 $16^2 + 17^2 + 18^2 + \dots + 25^2 = 4285$ ，求 $32^2 + 34^2 + 36^2 + \dots + 50^2 = ?$ **答**：_____。

 老師說

已知 $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot 27\right]^{-3} \cdot 81^{-2} = 3^x$ ，則 $x = ?$

解


 學生做

計算 $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times 27\right]^{-2} \times 9^{-3}$ 。

解

 延伸練習

化簡 $\left(\frac{16}{9}\right)^{-0.5} \times (0.125)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-1.5}$ 。答：_____。

 老師說

已知 x, y 為整數，且 $27 \times 3^x \times 9 = 3^{y+2}$ ，

$16 \times 4^y \div 2 = \frac{1}{2^x}$ ，則 $2x - y = ?$

解


 學生做

已知 $3^x = 6$ ， $5^y = 10$ ，求 $3^{-x} \times 25^y = ?$

解

 延伸練習

若 $a^x = \sqrt{2}$ ，則 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = ?$ 答：_____。

 老師說

計算 $\sqrt{\sqrt{3^4}} \times \sqrt[6]{27^5} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 = ?$

解

 學生做

計算 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} \times \sqrt[5]{1024} = ?$

解

 延伸練習

設 $a = \sqrt[3]{\sqrt{16}}$ ， $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$ ， $c = \sqrt[4]{2\sqrt{32}}$ ，則 $\frac{a^6 b}{c^8} = ?$ 答：_____。

老師說

已知 $x=4.5 \times 10^7$ ，將 $2x^2$ 化為科學記號，並判斷其位數。

解**學生做**

將 $\frac{0.123}{1000}$ 化為科學記號，並判斷其小數點後第幾位開始為非零項。

解**老師說**

試求下列各式的值：

- (1) $10^{\log 12}$ 。
 (2) $10^{\log 0.7}$ 。

解**學生做**

試求 $10^{2\log 2}$ 的值。

解**老師說 ***

已知 $x=\log 100$ ， $y=10^{\log 2}$ ，則 $x+y=?$

解**學生做**

計算 $10^{\log 2} \times 10^{\log 5}=?$

解

老師說 *

已知 $(8.178)^n = 1000$ ， $(0.08178)^m = 1000$ ，則

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = ?$$

解* **學生做**

設 $5^a = 2^b = \sqrt{10^c}$ ($a \neq 0$)，則 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = ?$

解**延伸練習**

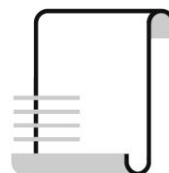
若 $(0.6)^x = (0.0048)^y = a$ ，且 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ ，則 $a = ?$ **答**：_____。

先修評量

單元

4

指數與常用對數



得分

每題 10 分，共計 100 分

1. 比較 $a = \left(\frac{6}{-7}\right)^2$ ， $b = \frac{6^2}{-7^2}$ ， $c = \left(\frac{5}{-6}\right)^2$ ， $d = \frac{5^2}{-6^2}$ 大小。

答：_____。

2. 化簡 $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^a$ ，其中 $a =$ _____。

3. 設 $a^{2x} = \sqrt{3+\sqrt{8}}$ ，則 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$ 之值 = _____。

4. $13^{2x} = 11$ ， $11^{3y} = 13$ ，則 $xy =$ _____。

5. 已知 $2 \approx 10^{0.3010}$ (記作 $\log 2 \approx 0.3010$)，若 $x = 20000 = 2 \times 10^4$ ，則 $\log x \approx$ _____。

6. 續上題 5，若 $y = 2^{100}$ ，則 $\log y \approx$ _____，依此判定 $y = 2^{100}$ 為 _____ 位數。

7. 已知 $a = 3.1 \times 10^{-4}$ ， $b = 5.2 \times 10^{-8}$ ，判斷下列關於 $a-b$ 之值的敘述何者正確。

(A) 比 1 大 (B) 介於 0, 1 之間 (C) 介於 -1, 0 之間 (D) 比 -1 小

【107. 會考】

答：_____。

8. 民國 106 年 8 月 15 日，大潭發電廠因跳電導致供電短少約 430 萬瓩，造成全臺灣多處地方停電。已知 1 瓩等於 1 千瓦，求 430 萬瓩等於多少瓦？

(A) 4.3×10^7 (B) 4.3×10^8 (C) 4.3×10^9 (D) 4.3×10^{10}

【108. 會考】

答：_____。

9. 右圖的數線上有 O, A, B 三點，其中 O 為原點， A 點所表示的數為 10^6 。根據圖中數線上這三點之間的實際距離進行估計，下列何者最接近 B 點所表示的數？



(A) 2×10^6 (B) 4×10^6 (C) 2×10^7 (D) 4×10^8

【106. 會考】

答：_____。

10. 已知 $a+b = \sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ， $a-b = \sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ，則 $a^4 + a^2b^2 + b^4 =$ _____。

重點聚焦

一、直線的斜率：

設直線 L 不是鉛垂線，且 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$

為 L 上相異兩點，則 L 的斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

($x_1 - x_2 \neq 0$)。

(當直線 L 是鉛垂線時， $x_1 = x_2$ ，此時分母為 0，所以鉛垂線的斜率不存在。)

說明：

傾斜程度(坡度) = $\frac{\text{鉛垂位移}}{\text{水平位移}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

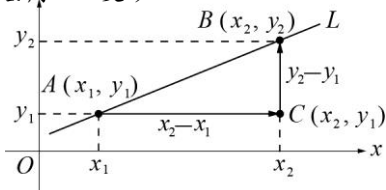
例如：

50% (坡度) = $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ (斜率)。

(底角約 26.6 度)

100% (坡度) = $\frac{100}{100} = 1$ (斜率)。

(底角 45 度)



二、直線的方程式：

(1) 點斜式：

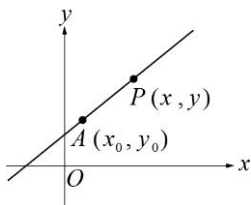
過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 。

說明：

設點 (x, y) 為所求直線上 $A(x_0, y_0)$

以外的點，符合 $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$

$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ 。



(2) 斜截式：

y 截距為 b (過點 $(0, b)$) 且斜率為 m 的直線方程式為

$$y = mx + b。$$

(3) 截距式：

x 截距為 a ， y 截距為 b ，且 $ab \neq 0$ 的直線方程式為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1。$$

注意：

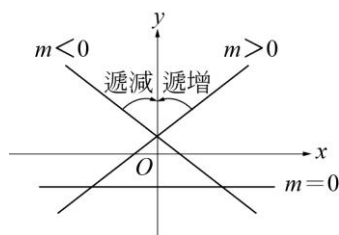
x 截距為 0 且 y 截距為 0 的直線方程式為 $y = mx$ 。(其中 m 為直線的斜率)

(4) 一般式：

$ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$) 的斜率為 $-\frac{a}{b}$ 。

三、斜率的直觀特性：

- (1) 水平線的斜率為 0。
- (2) 直線由左下往右上傾斜時，斜率為正。
- (3) 直線由左上往右下傾斜時，斜率為負。
- (4) 直線愈接近鉛垂線，其斜率的絕對值也愈大。
- (5) 斜率的絕對值 = 坡度。



老師說

$(-3, 1)$ 為下列哪一條直線上的點?
 $L_1: x+2y=-1$, $L_2: x-2y=1$,
 $L_3: 2x+3y=6$, $L_4: 2x+3y=-6$ 【105.會考】

解

學生做

二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 7x-3y=8 \\ 3x-y=8 \end{cases}$ 的解為

$(x, y)=(a, b)$, 則 $a+b=?$ 【107.會考】

解

延伸練習

對任意實數 m , 直線 $L: y=mx+(3m+2)$ 恆通過哪一定點?

(A) $(3, 2)$ (B) $(-3, 2)$ (C) $(3, -2)$ (D) $(-2, -3)$ (E) $(2, 3)$

答: _____。

老師說

直線 $L: 5x+ky+2=0$ 通過 $A(a+3, 4)$,
 $B(a, -1)$ 兩點, 則 $k=?$ 【國中試題】

解

學生做

求直線 $L: 2x-y=-2$ 對稱於 y 軸的直線方程式。

【國中試題】

解

延伸練習

不論任何實數 k , 直線 $(3k+5)x+(k-2)y+4k+1=0$ 恆過的定點為何? 答: _____。

老師說

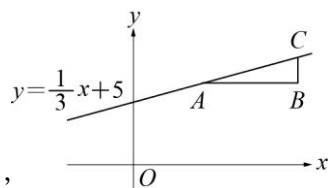
如圖, 直線 L 的方程

式為 $y=\frac{1}{3}x+5$ 。若

A, C 均在 L 上, 且

$\overline{AB} \parallel x$ 軸, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$,
 $\overline{AB}=6$, 求 L 的斜率與 $\overline{BC}=?$

解

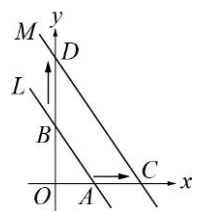


學生做

如圖, 直線 $L: 3x+2y=30$
 與直線 M 平行, 與兩軸交點
 於 A, B , 當 A 右移 12 個單
 位至 C , B 同時上移至 D ,
 C, D 皆落於直線 M 上, 求
 直線 M 的斜率與 $D=?$

解

【國中試題】



延伸練習

設 $f(x)$ 為一次函數, 而且每當 x 增加 1 單位時, 其相對應的函數值增加 3 單位, $f(-4)=0$, 則:

- (A) $y=f(x)$ 的圖形之斜率為 3 (B) $y=f(x)$ 的圖形為一由左上向右上傾斜之直線 (多選)
 (C) $y=f(x)$ 的圖形不通過第二象限 (D) $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸交於點 $(0, 12)$

(E) $f(-3)=3$ 。(多選)

答：_____。

老師說直線 L 方程式為 $x-3y+15=0$ ， L 的斜率 = ?

解

學生做直線 L 方程式為 $y=\frac{-3}{2}x+15$ ， L 的斜率 = ?

解

延伸練習設 $f(x)=\frac{5}{3}x-2^{10}$ ，求 $\frac{f(1911)-f(2019)}{108}=?$ 答：_____。**老師說**斜率為 m 的直線 $L:(y-2)=m(x+3)$ 必定過哪一個定點？

解

學生做求過 $(-3, 1)$ 且斜率為 $-\frac{1}{2}$ 的直線方程式。

解

老師說直線 L 方程式為 $\frac{x}{-15}+\frac{y}{5}=1$ ， L 的斜率 = ?

解

學生做直線 L 方程式為 $\frac{x}{10}+\frac{y}{15}=1$ ， L 的斜率 = ?

解

延伸練習

在坐標平面上，已知 O 為原點， $A(0, 4)$ ， $B(-3, 0)$ ， $C(4, 0)$ 三點，直線 L 過 C 點且與 y 軸交於 D 點。若 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ ，則 L 可能為下列哪條直線？(多選)

- (A) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ (B) $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ (C) $\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=1$ (D) $-\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=1$ (E) $-\frac{x}{4}+\frac{3y}{16}=-1$

答：_____。

老師說

如右圖，三直線

$$L_1: y = ax + b,$$

$$L_2: \frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1,$$

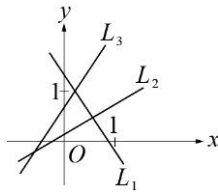
$$L_3: ex + fy = 1,$$

請選出正確的選項

(A) $ab > 0$ (B) $cd > 0$ (C) $c > d$

(D) $bf > 1$ (E) $ad > 1$ 。

解



學生做

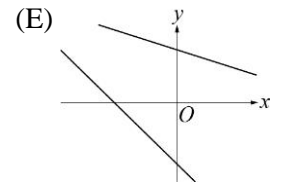
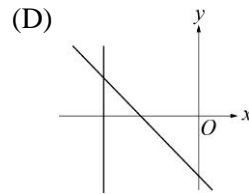
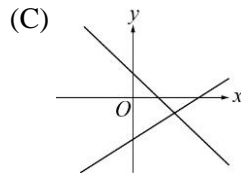
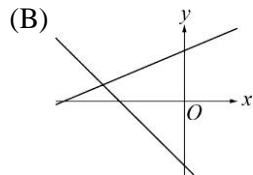
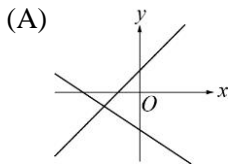
求直線 $L: -x + \frac{y}{2} = 1$ 對稱於 y 軸的直線方程

式。

解

延伸練習

將直線方程式 $y = ax + b$ 與 $y = bx + a$ 畫在同一個坐標平面上，下列何者可能為所得圖形？



答：_____。

【國中試題】

老師說

如圖， O 為原點，有三點

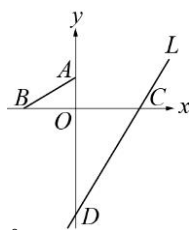
$A(0, 3), B(-5, 0), C(6, 0)$ ，

直線 $L: 5x - 3y = k$ 之截點分別為 C, D 兩點，

(1) 求 $k = ?$

(2) 說明 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ 的理由。

解



【106.會考】

學生做

坐標平面上， O 為原點，有三點 $A(0, 4)$ ，

$B(-3, 0), C(4, 0)$ ，直線 L 之截點分別為 C, D

兩點，已知 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 相似，求直線 L 方程

式。(不只一解)

【國中試題】

延伸練習

設一直線之截距和為 1，且與兩坐標軸所圍成之三角形面積為 3，求此直線方程式。(有二解)

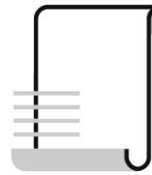
答：_____。

先修評量

單元

5

直線方程式



每題 10 分，共計 100 分

1. 已知坐標平面上函數 $y=3x+a$ 圖形通過點 $(0, -4)$ ，其中 a 為一數，求 a 的值為何？

(A) -12 (B) -4 (C) 4 (D) 12

答：_____。【107.會考】

2. 若聯立方程式 $\begin{cases} 5x-y=5 \\ y=\frac{1}{5}x \end{cases}$ 的解為 $x=a, y=b$ ，則 $a+b$ 之值為何？

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{75}{13}$ (C) $\frac{31}{25}$ (D) $\frac{29}{25}$

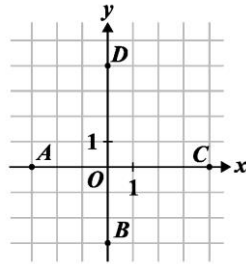
答：_____。【103.會考】

3. 右圖的坐標平面上有原點 O 與 A, B, C, D 四點。若有一直線 L 通過點 $(-3, 4)$ 且與 y 軸垂直，則 L 也會通過下列哪一點？

(A) A (B) B (C) C (D) D

【108.會考】

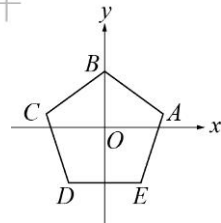
答：_____。



4. 如圖， $ABCDE$ 是坐標平面上一個正五邊形，下列各直線中，斜率為正的有

(A) 直線 AB (B) 直線 BC (C) 直線 CD (D) 直線 DE (E) 直線 EA

答：_____。



5. 求直線 $10^2x+2^{10}y+12^{12}=0$ 的斜率=_____。

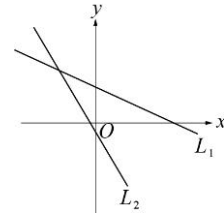
6. 求直線 $L_k: 5x-2y+1+k \cdot (2x+y+4)=0$ ($k \in R$) 恆過的定點為何？

答：_____。

7. 如圖，兩直線 L_1, L_2 之方程式分別為 $L_1: x+ay+b=0$,

 $L_2: x+cy+d=0$ ，則(A) $a < 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $c < d$

答：_____。



8. 設一次函數 $f(x)=ax+b$ 滿足 $f(2)=0, f(4)=4$ ，當 $-2 \leq x \leq 5$ 時，下列選項何者正確？

(A) $a=-4$ (B) 最大值為 8 (C) 最小值為 -6 (D) $f(1)=2$ (E) $f(3)=2$

答：_____。

9. 設 $f(x)=\frac{9}{7}x+20^{19}$ ，求 $\frac{f(2019)-f(2001)}{81}$ =_____。

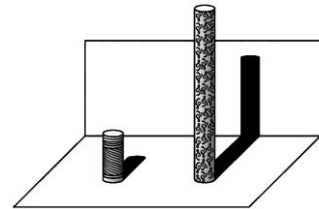
10. 在公園有兩座垂直於水平地面且高度不一的圓柱，兩座圓柱後面有一堵與地面互相垂直的牆，且圓柱與牆的距離皆為 120 公分。敏敏觀察到高度 90 公分矮圓柱的影子落在地面上，其影長為 60 公分；而高圓柱的部分影子落在牆上，如圖所示。

已知落在地面上的影子皆與牆面互相垂直，並視太陽光為平行光，在不計圓柱厚度與影子寬度的情況下，請回答下列問題：

(1) 若敏敏的身高為 150 公分，且此刻她的影子完全落在地面上，則影長為多少公分？

(2) 若同一時間量得高圓柱落在牆上的影長為 150 公分，則高圓柱的高度為多少公分？請詳細解釋或完整寫出你的解題過程，並求出答案。

答：_____。



重點聚焦

一、圓的定義：

平面上到一定點等距離的所有點所形成的圖形稱為圓。(所謂的“圓”指的是“圓周”上所有點所形成的幾何圖形)

二、圓的標準式：

若圓心為 $A(h, k)$,

半徑為 r 的圓上的任

何一點 P , $\overline{AP} = r$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

即圓的標準式。

三、圓的一般式：

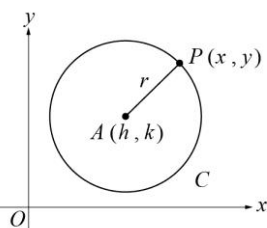
將圓的標準式 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 展開
可得 $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$,
意即

圓的方程式必可寫成 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的
型式, 稱為圓的一般式。

四、 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 圖形：

將 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 分別對 x, y 配方,

$$\text{得 } \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{d^2 + e^2 - 4f}{4}.$$



因此, 可歸納出下列三種情形:

(1) 圓: 當 $d^2 + e^2 - 4f > 0$ 時,

則表圓心為 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$,

半徑為 $\frac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}}{2}$ 的圓。

(2) 點圓: 當 $d^2 + e^2 - 4f = 0$ 時,

則圖形為一點 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ 。

(3) 虛圓: 當 $d^2 + e^2 - 4f < 0$ 時, 則沒有圖形。

五、點與圓的位置關係：

給定一個點 $P(x_0, y_0)$ 以及圓 C :

$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 。(其中 $d^2 + e^2 - 4f > 0$)

(1) 若 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f < 0$, 則 P 點在圓內。

(2) 若 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$, 則 P 點在圓上。

(3) 若 $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f > 0$, 則 P 點在圓外。

老師說

圓心在 $A(4, 3)$ 且通過原點 O 的圓的方程式為何?

解

學生做

已知 $A(5, 3), B(-1, 2)$, 以 A, B 為直徑兩端點的圓方程式為何?

解

延伸練習

已知 $A(2, -3), B(-4, 3), C$ 為 $\triangle ABC$ 的三頂點且 $\angle C = 90^\circ$, 請問在坐標平面上, 所有 C 點所圍成

的圓面積為何？**答**：_____。

老師說

求圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ 的圓心及半徑。

解

學生做

設圓 $C: 3x^2 + 3y^2 - 6x + 18y - 18 = 0$ 的圓心 (a, b) ，半徑 r ，求序組 $(a, b, r) = ?$

解

延伸練習

求圓 $3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$ 的半徑 = ? **答**：_____。

老師說

x, y 為實數且 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ ，則 $(x-5)^2 + (y-2)^2$ 的最小值為何？

解

學生做

若 x, y 為實數，且 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ ，則 $x^2 + y^2 + 4x - 4y$ 之最大值為何？

解

延伸練習

$x^2 + y^2 = 12x + 6y + 4$ 和 $x^2 + y^2 = 12y + k + 4x$ 的圖形，在 $a \leq k \leq b$ 時有交點，則 $a - b = ?$

答：_____。

老師說

判斷下列方程式的為何種圖形？

(1) $\sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ 。

(2) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 9 = 0$ 。

(3) $8x^2 + 8y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$ 。

解

學生做

判斷下列方程式的為何種圖形？

(1) $\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$ 。

(2) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$ 。

(3) $8x^2 + 8y^2 + 4x + 4y = 0$ 。

解

老師說

設 $C: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 為坐標平面上的圓，試回答下列問題：

- (1) $A(3, 6)$ 與圓 C 的切線段長 = ?
- (2) 若點 $(2, a)$ 在圓 C 內部，求實數 a 的範圍。

解

學生做

若點 $(1, -1)$ 及 $(2, 3)$ 分別在圓 $x^2 + y^2 = k$ 的內、外部，則 k 之範圍為何？

解

老師說

設圓心在直線 $y = 2x$ 上，且圓通過 $A(1, 0)$ ， $B(3, 2)$ ，求圓心至弦 \overline{AB} 的距離。

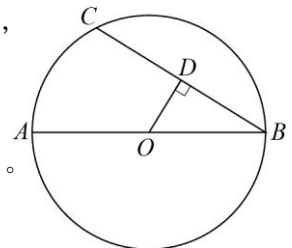
解

學生做

如圖， \overline{AB} 為圓 O 的直徑， C 為圓 O 上一點， $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求 $\triangle OBD$ 面積。

解

【104.會考】



延伸練習

一圓通過兩點 $(4, -3)$ ， $(-10, 3)$ 且其圓心在直線 $2x - y = 0$ 上，如果令此圓的方程式為 $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + c = 0$ ，則：

- (A) a 為 2 的倍數 (B) a 為 3 的倍數 (C) b 為 5 的倍數
 (D) c 為 7 的倍數 (E) c 為 9 的倍數

答：_____。

老師說

求圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 對稱於直線 $L: x - y + 3 = 0$ 的圓方程式。

解

學生做

求平行直線 $x + y = 5$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ 相切的直線方程式為何？(兩解)

解

延伸練習

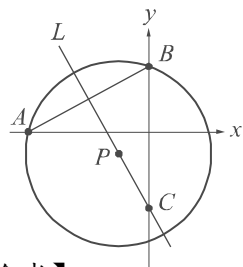
圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ ，下列哪一點向圓所做的兩條切線互相垂直？

- (A) $(2, 0)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(-1, -1)$ (D) $(1, \sqrt{3})$ (E) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

答：_____。

老師說 *

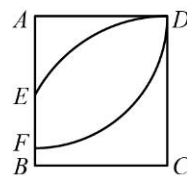
如圖， A, B 兩點分別為圓 P 與 x 軸、 y 軸的交點，直線 L 過 P 點與 \overline{AB} 垂直， C 為 L 與 y 軸的交點。若 A, B, C 的坐標分別為 $(a, 0), (0, 4), (0, -5)$ ，其中 $a < 0$ ，則 $a = ?$ 【107.會考】



解

* 學生做

如圖，在矩形 $ABCD$ 中，以 \overline{AD} 為半徑， A 為圓心畫一弧交 \overline{AB} 於 F 點；以 \overline{CD} 為半徑， C 為圓心畫一弧交 \overline{AB} 於 E 點。若 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{CD} = \frac{17}{3}$ ，求 $\overline{EF} = ?$ 【105.會考】



解

延伸練習

已知 $A(-3, 0), B(7, 0)$ ，以 \overline{AB} 為直徑畫一半圓與正 y 軸交於 D 點， D 點坐標為何？

答：_____。

【國中試題】



先修評量 單元 6 圓方程式

每題 10 分，共計 100 分

1. 求圓心為 $(1,1)$ 的單位圓 (半徑長為 1) 方程式為_____。
2. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ ，其圓心=_____，半徑長=_____。
3. 有一圓 C' 通過 $A(1,1)$ ，且與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 有相同的圓心 (a, b) ，則
 (A) 圓心為 $(1, 2)$ (B) 圓 C' 半徑為 $\sqrt{5}$ (C) 圓 C' 方程式為 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
 (D) $a+b=3$ (E) 圓 C' 面積為 5π

答：_____。

4. 設圓 $C: 2x^2 + ay^2 - 2bx + 8y + 18 = 0$ 之圓心為 $(h, -2)$ ，並過點 $P(3, 0)$ ，則圓心=_____，半徑長=_____。

5. $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+6)^2}$ 的圖形為一圓，求此圓的標準式。

答：_____。

6. 方程式 $ax^2 + bxy - y^2 + 4x - 6ky = 0$ 的圖形若為一圓，下列何者正確？(多選)

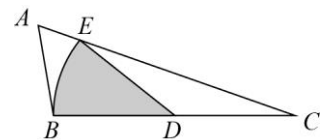
- (A) $a=1$ (B) $b=0$ (C) 圓心為 $(2, -3k)$
 (D) k 的範圍為 $k > -\frac{4}{9}$ (E) 最小圓面積為 4π

答：_____。

7. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 的中點，以 D 為圓心， \overline{BD} 長為半徑畫一弧交 \overline{AC} 於 E 點。若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 100^\circ$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則扇形 BDE 的面積為何？

- (A) $\frac{1}{3}\pi$ (B) $\frac{2}{3}\pi$ (C) $\frac{4}{9}\pi$ (D) $\frac{5}{9}\pi$

答：_____。



【107.會考】

8. 在 xy 平面上，所有滿足 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ 條件的點 $P(x, y)$ 所形成的區域面積=_____。

9. 圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ ，已知某點向圓所做的兩條切線互相垂直，求出所有符合此條件的點所形成的圖形。

答：_____。

10. 方程式 $x^2 + y^2 + 2(m+1)x - 2my + 3m^2 - 7 = 0$ ，則下列敘述哪些正確？(多選)

- (A) $m = \sqrt{3}$ 時，圖形為一圓 (B) 圓面積最大為 9π
 (C) $m = -4$ 時，圖形為一點 (D) $m = \frac{3}{4}$ 時，無圖形
 (E) $m = \frac{7}{2}$ 時，圖形和 y 軸相切

答：_____。

重點聚焦

一、多項式的基本概念：

1. 多項式的定義：

(1) 若 n 是正整數或 0，如：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

即為 x 的多項式。

例如：

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6, \text{ 其中 } 3x^5 \text{ 為 } 5 \text{ 次項, } -2x^3 \text{ 為 } 3 \text{ 次項, } 6 \text{ 為常數項。}$$

(2) $a_n x^n$ 是 x 次數最高的非零項 ($a_n \neq 0$)， $f(x)$ 是一個 x 的 n 次多項式，

n 為 $f(x)$ 的次數，記為 $\deg(f(x)) = n$ 。

例如：

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6 \text{ 為 } 5 \text{ 次多項式, 記為 } \deg(f(x)) = 5。$$

(3) 0 也是一個多項式，稱為零多項式，不定它的次數。(非零多項式才有次數)

(4) 由高次項寫到低次項，稱為降冪排列；由低次項寫到高次項，稱為升冪排列。

2. 兩多項式相等：

當兩多項式相對應的每一項的係數都相同，則稱這兩個多項式相等。

$$\text{例如：} f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6, g(x) = 6 + 3x^5 - 2x^3,$$

則 $f(x) = g(x)$ 。

二、多項式的四則運算：

1. 多項式的加減法：

(1) 加法：

$$(3x^5 - 2x^3 + 6) + (x^3 + x + 1) \\ = 3x^5 + (-2 + 1)x^3 + x + (6 + 1)。$$

(2) 減法：

$$(3x^5 - 2x^3 + 6) - (x^3 + x + 1) \\ = 3x^5 + (-2 - 1)x^3 + (0 - 1)x + (6 - 1)。$$

2. 多項式的乘法：

(1) 利用乘法對加法的分配律展開運算，或以直式(或直式分離係數法)加以計算。

(2) 若 $\deg(f(x)) = n, \deg(g(x)) = m$ ，則 $\deg(f(x)g(x)) = n + m$ 。

注意：零多項式乘上任意次多項式仍為零多項式。故此，零多項式無法定義次數。

3. 多項式的除法：

除法原理：

將多項式 $f(x)$ 除以多項式 $g(x)$

(其中 $g(x) \neq 0$)，會得到唯一的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ ，且 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，其中 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ 或是 $r(x) = 0$ 。

老師說

試運算整理多項式 $3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 \cdot x^2 + x$ ，並按降冪排列。

解

學生做

$3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 \cdot x^2 + x$ 的三次項係數為何？

解

延伸練習

下列何者為 x 的多項式？

- (A) $x^2 - x + \sqrt{2}$ (B) $x^2 - \sqrt{x} + 1$ (C) $2^x + 2^{-x}$ (D) $x + \frac{1}{x} + 1$ (E) $x^2 + |x| + 3$

答：_____。

老師說

已知 $f(x) = 3 \cdot x^{(3^3)} + 2 \cdot x^{(2^2)} + x$ ，求 $\deg(f(x)) = ?$

解

學生做

$f(x) = 3x^3 - 4x^4 + 2x^2 - x$ ，求 $\deg(f(x)) = ?$

解

延伸練習

若 $f(x)$ 為 4 次多項式，則 $f(x^2+1)$ 的次數為何？**答**：_____。

老師說

化簡 $(2x+1)(x-1) - (x^2+x-2) = ?$

解

【105.會考】

學生做

化簡 $(3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5) = (3x^6-4x^5) \times p(x)$ ，其中 $p(x) = ?$

【103.會考】

解

延伸練習

若 $a(x-3)(x-2)(x-1) + b(x-2)(x-1) + c(x-1) + d = 2x^3 - 9x^2 + 9x + 5$ ，則 $a+b+c+d = ?$
答：_____。

老師說

試求 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$ 的三次項係數。

解

【國中試題】

學生做

$(2x^{11} + 3x^7 + 2x^6 + 5x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 2)^2$ 展開式中 x^2 項的係數 = ?

解

延伸練習

試求 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$ 展開後各項係數和 = ? **答**：_____。

老師說

計算多項式 $10x^3 + 7x^2 + 15x - 5$ 除以 $5x^2$ 後，所得餘式為何？

【103.會考】

解**學生做**

計算多項式 $-2x(3x-2)^2 + 3$ 除以 $3x-2$ 後，所得商式與餘式兩者之和為何？

【104.會考】

解**延伸練習**

已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式為 $3x^2 - 2x + 1$ ，則 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式 = ?

答：_____。

老師說

設 $x^3 + 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$ 之商式為 $x + 2$ ，餘式為 $2x - 1$ ，則 $f(x) = ?$

解*** 學生做**

以 $x + 2$ 除多項式 $(x + 1)^3(2x + 1) + 5$ 所得之餘式 = ?

解**延伸練習**

設 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 5$ ，若 $f(-3) = 8$ ，則 $f(3) = ?$ **答**：_____。

老師說 *

以 $x + 2$ 除多項式 $(x + 1)^3(2x + 1) + 5$ 所得之餘式 = ?

解*** 學生做**

設 $f(x)$ 為多項式，且 $f(1) = 1$ ， $f(-1) = 3$ ， $f(0) = 5$ ， $f(3) = 7$ ， $f(-3) = 9$ ，則 $f(x + 3)$ 之常數項 = ?

解**延伸練習**

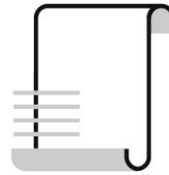
已知 $x = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ ，則 $x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 13x - 19 = ?$

(提示： $x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 13x - 19 = (x^2 + 5x - 1)(x^2 - 3x + 2) - 17$)

答：_____。

先修評量

單元 7 多項式 (1)



得分

每題 10 分，共計 100 分

1. $f(x)$, $g(x)$ 均為 n 次多項式，且 $h(x)=g(x)-f(x)$ ，則 $h(x)$ 為
 (A) 零多項式 (B) 零次多項式 (C) n 次多項式
 (D) $(n-1)$ 次多項式 (E) 以上均有可能

答：_____。

2. 多項式 $108x+107x^2+106x^3+\cdots+x^{108}$ (係數成等差)，按規律可得 54 次項係數為何？

答：_____。

3. 已知 $f(2x-1)=3x+8$ ，則 $f(3)=$ _____， $f(x)=$ _____。

4. 若 $f(x)=x^4$ ，則 $f(x^2+1)$ 的次數為何？

答：_____。

5. $(x^2+3x+2)^2$ 除以 x^2+2x+3 所得之餘式=_____。

6. 已知多項式 ax^3+bx^2+cx+d ，其中 $a+b+c+d=-6$ ，則 ax^3+bx^2+cx+d 除以 $x-1$ 的餘式為 _____。

【國中試題】

7. $x^{2019}+2019$ 除以 $2019x+2019$ 的餘式為何？

答：_____。

8. 設 $f(x)=(a-2)x^2+(b+3)x+c$ 且 $f(11)=f(12)=f(13)=1$ ，則序組 $(a, b, c)=$ _____。

9. 以 x^2-x+1 除 $f(x)=x^5-3x^3+bx+a$ 所得之餘式為 $2x+3$ ，則 $a+b=$ _____，商式= _____。

10. $f(x)=2x^4+x^3-x^2-7x-6$ ，求 $f\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)=$ _____。

重點聚焦

一、二次函數及其圖形：

1. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)。

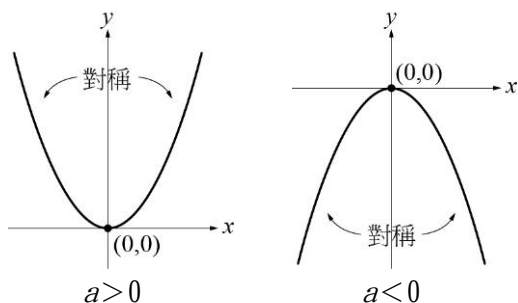
2. 二次函數 $y = ax^2$ 的圖形：

(1) 二次函數 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的圖形為拋物線，圖形的頂點坐標為 $(0, 0)$ ，且 y 軸為對稱軸。

(2) 若 $a > 0$ ，圖形開口朝上。

(3) 若 $a < 0$ ，圖形開口朝下。

(4) 若 $|a|$ 愈大，開口愈小；
若 $|a|$ 愈小，開口愈大。



3. 二次函數 $y = ax^2$ 圖形的平移：

設 $h, k > 0$ ，

(1) $y = ax^2 + k$ 的圖形可由 $y = ax^2$ 向上平移 k 個單位得到。

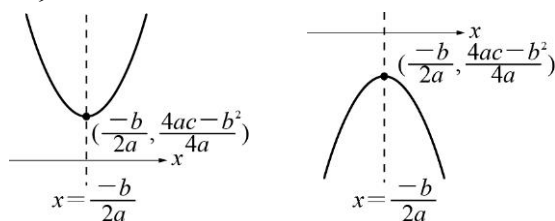
(2) $y = ax^2 - k$ 的圖形可由 $y = ax^2$ 向下平移 k 個單位得到。

(3) $y = a(x-h)^2$ 的圖形可由 $y = ax^2$ 向右平

移 h 個單位得到。

(4) $y = a(x+h)^2$ 的圖形可由 $y = ax^2$ 向左平移 h 個單位得到。

4. $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的圖形：



(1) 頂點在 $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ，

對稱軸為 $x = \frac{-b}{2a}$ 。

(2) 當 $a > 0$ 時，圖形開口向上，頂點為最低點。

(3) 當 $a < 0$ 時，圖形開口向下，頂點為最高點。

二、一元二次方程式的解：

一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，利用配方法可得方程式的公式解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

三、分式方程式*：

$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 的方程式，它的解就是 $f(x) = 0$ 的

解，但是 $g(x) \neq 0$ 。

老師說

方程式 $x^2 - 8x = 48$ 可表示成 $(x-a)^2 = 48 + b$ 的形式，其中 a, b 為整數。求 $a+b = ?$

解

【106.會考】

學生做

已知 $x^2 - 3x + b = 0$ 可配方成為 $(x-a)^2 = 7$ ，試配方 $x^2 - 3x + b = 8$ 。

【國中試題】

解

延伸練習

若 $a = 2b + 3$ ，則 $a^2 - 4b$ 的最小值是多少？答：_____。

【國中試題】

老師說

α, β 為方程式 $x^2+3x+1=0$ 的兩根，則 $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$ 之值 = ?

解

學生做

α, β 為方程式 $x^2+3x+c=0$ 的兩根，其中 c 為常數，且 $\alpha - \beta = \frac{1}{3}$ ，求 $\alpha^2 - \beta^2 = ?$

解

【國中試題】

延伸練習

α, β 為方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩(實)根，證明： $\alpha + \beta = -a$ ，同時 $\alpha\beta = b$ (根與係數關係)。

答：_____。

老師說

α, β 為方程式 $x^2+5x+c=0$ 的兩根，其中 c 為常數，且 $\alpha - \beta = \frac{1}{5}$ ，求 $\alpha^2 - \beta^2 = ?$

解

(參照學生做 2)

學生做

設 $x^2-3x+1=0$ 之兩根為 α, β ，則 $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = ?$

解

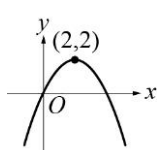
延伸練習

若 a, b 為方程式 $x^2+5x-4=0$ 的兩根，則 $(ab+a+2b+2)(ab+4a+3b+12) = ?$

答：_____。

老師說

如圖，二次函數圖形通過原點，且最高點落在 $(2, 2)$ ，求此二次函數。



解

學生做


已知二次函數 $y = -3x^2$ 圖形，經平移後，圖形過點 $(1, -1)$ ，對稱軸變為 $x - 2 = 0$ ，求平移後的頂點坐標。

解

【國中試題】

 延伸練習

設 x 為實數， $f(x) = x^2 - 2x + 2019$ ，則 $f(x + \frac{108}{2019})$ 之最小值 = _____。

 老師說

已知坐標平面上有兩個二次函數 $y = a(x+1)(x-7)$ ， $y = b(x+1)(x-15)$ 的圖形，其中 a, b 為整數。判斷將當中的二次函數 $y = b(x+1)(x-15)$ 沿 x 方向(左右)如何平移，方可使此兩個二次函數圖形的對稱軸重疊？

【106.會考】

 解

 學生做

已知坐標平面上有兩個二次函數 $y = a(x+3)(x-5) - 7$ ， $y = b(x-3)(x-7) - 5$ 的圖形，其中 a, b 為整數。將二次函數 $y = a(x+3)(x-5) - 7$ 左右如何平移，兩個圖形的頂點會在同一鉛直線上？

【國中試題】


 解

 延伸練習

設點 (a, b) 在圖形 $y = 3x^2$ 上，則下列何者在圖形 $y = 3(x+2)^2 + 4$ 上？(多選)

(A) $(3a, b)$ (B) $(3a, b-4)$ (C) $(a-2, b)$ (D) $(a-2, b+4)$ (E) $(-a-2, b+4)$

 答：_____。

 老師說

設 $y = 2x^2 + 10x + k$ 之圖形交 x 軸於 P, Q 兩點，且 $\overline{PQ} = 3$ ，則 $k = ?$

【國中試題】


 解

 學生做

坐標平面上，某二次函數的頂點為 $(2, -1)$ ，此函數圖形與 x 軸相交於 P, Q 兩點，且 $\overline{PQ} = 6$ 。若此函數圖形通過 $(1, a), (3, b), (-1, c), (-3, d)$ 四點，則 a, b, c, d 之值何者為正？

 解

【105.會考】

 延伸練習

已知坐標平面上一直線 $L: y + 2 = 0$ ，與二次函數 $y = 3x^2 + a$ 的圖形相交於 A, B 兩點；與二次函數 $y = -2x^2 + b$ 的圖形相交於 C, D 兩點，其中 a, b 為整數。若 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{CD} = 4$ ，則 $a + b = ?$

答：_____。

【107.會考】

老師說

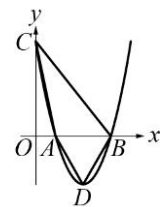
坐標平面上，二次函數 $y = -x^2 + 6x - 9$ 圖形的頂點為 A ，且此函數圖形與 y 軸交於 B 點。若 C 點落在曲線上， D 點落在 x 軸上，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，則 D 點 = ? 【104.會考】

解

學生做

如圖，坐標平面上，二次函數 $y = x^2 + 6x + k$ 的圖形與 x 軸交於 A, B 兩點，與 y 軸交於 C 點， D 點為頂點，且 $k > 0$ 。若 $\triangle ABC : \triangle ABD = 2 : 1$ ，則 $k = ?$

解

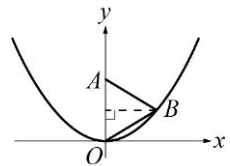


【國中試題】

延伸練習

如圖，二次函數 $y = kx^2$ 圖形通過 $(3, 4)$ 及 B 點，已知 A 點在 y 軸上，且 $\triangle OAB$ 為正三角形，求 $\triangle OAB$ 面積。 **答**：_____。

【國中試題】



老師說 *

解分式方程式 $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+1} = 3$ 。

解

*** 學生做**

解方程式 $\frac{x^2+7x-17}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-2}$ 。

解

延伸練習

解方程式 $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1} + \frac{x^2+4x+1}{x^2+2} = \frac{5}{2}$ 。 **答**：_____。

先修評量

單元 8 多項式(2)

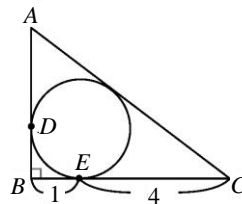


每題 10 分，共計 100 分

1. 如圖，直角三角形 ABC 的內切圓分別與 \overline{AB} ， \overline{BC} 相切於 D 點、 E 點。根據圖中標示的長度與角度，求 \overline{AD} 的長度為何？

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ 【108.會考】

答：_____。



2. 若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸交點為 $(6, 0)$ ， $(-6, 0)$ ，且過 $(4, -4)$ ，則

$a=$ _____。

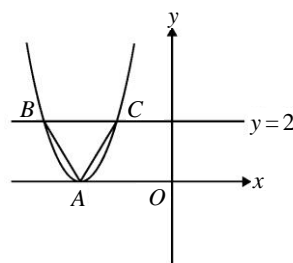
【國中試題】

3. α ， β 為方程式 $x^2+3x+1=0$ 的兩根，則 $\alpha + \beta =$ _____。

4. 如圖，坐標平面上有一頂點為 A 的拋物線，此拋物線與方程式 $y=2$ 的圖形交於 B ， C 兩點，且 $\triangle ABC$ 為正三角形。若 A 點坐標為 $(-3, 0)$ ，則此拋物線與 y 軸的交點坐標為何？

(A) $(0, \frac{9}{2})$ (B) $(0, \frac{27}{2})$
(C) $(0, 9)$ (D) $(0, 18)$ 【108.會考】

答：_____。



5. 求二次函數 $y=x^2-2x+2019$ 圖形的頂點坐標為_____。

6. 已知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 在座標平面上通過兩點 $(0, 5)$ 和 $(10, 8)$ ，若 $a < 0$ ， $0 < h < 10$ ， h 之值可能為下列何者？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

答：_____。

7. 若 $x-3y+5=0$ ，求 $4x^2-y^2$ 的最小值 = _____。

8. $f(x)=ax^2+bx+c$ ，若 $f(1)=f(2)=f(\sqrt{5})=5$ ，則 $f(1)+f(2)+\dots+f(100)=$ _____。

9. 若 α ， β 為 $x^2-2x+3=0$ 之兩根，則 $(\alpha^2+3)^3+(\beta^2+3)^3=$ _____。

10. 設 a 為實數，若二次函數 $y=ax^2-3x-4a$ 的圖形與 $y=x^2-3x-8$ 的圖形沒有交點，求 a 的範圍。

答：_____。